УДК 511
DOI: 10.21209/2074-9155-2018-12-2-109-116

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ БРОКАРА (О ЧЕТЫРЕХ ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ)

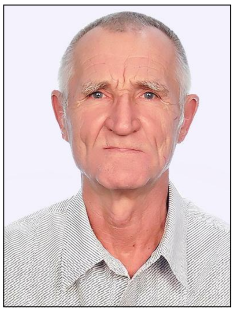
PROOF OF BROKAR'S HYPOTHESES (ON FOUR BASIC NUMBERS)

Рассмотрен натуральный ряд чисел, представленный в виде периодической структуры, состоящей из чередования первых простых чисел $\le P_x$ (по одному наименьшему простому множителю >1 от всякого числа), где Решето Эратосфена форматирует эти чередования $\le P_x$ в виде периодических праймориальных фракталов, расположенных от 1 до $P_x\#$ и повторяемых без изменений с периодом $=P_x\#$. Группируя $\varphi(P_x\#)$ вычетов mod($P_x\#$) каждого очередного фрактала $=P_x\#$ строго по четыре последовательных вычета mod($P_x\#$) и анализируя полученную структуру, автор доказывает гипотезу Брокара о том, что натуральный ряд чисел содержит не менее четырех простых чисел между квадратами двух последовательных простых чисел от P_x^2 до $P_{x+1}{}^2$, а также от $(P_{x+1}-2)^2$ до $P_{x+1}{}^2$

A natural series of numbers is presented, represented as a periodic structure consisting of alternating the first prime numbers $\le P_x$ (1 is the smallest simple factor> 1 of every number), where the Sieve of Eratosthenes formats these interlaces $\le P_x$ in the form of periodic primeval fractals located from 1 to P_x # and repeated without changes with a period = $P_x\#$. By grouping φ ($P_x\#$) of residues mod ($P_x\#$) of each successive fractal = $P_x\#$ strictly by 4 consecutive residues mod ($P_x\#$) deductions and analyzing the resulting structure, the author proves Brokar's hypothesis that the natural series of numbers contains at least four prime numbers between the squares of two consecutive primes from $P_x{}^2$ to $P_{x+1}{}^2$, and also from $(P_{x+1}-2)^2$ to $P_{x+1}{}^2$

Ключевые слова: пары вычетов; простые числа; праймориал; Решето Эратосфена; чередования; фрактал

Key words: residue pairs; prime numbers; primordial; sieve of Eratosthenes; alternations; fractal



А. Г. Щербаков

1. *Фракталы Решета Эратосфена.*

1.1. Натуральный ряд чисел в виде чередования простых. В статье «Четыре простых числа между квадратами двух последовательных простых чисел» [8. С. 77] использован основной закон арифметики «О единственности способа разложения всякого целого числа на простые множители», из которого следует, что натуральный ряд чисел (далее – н.р.ч.) единственным способом может быть представлен в виде чередования простых чисел (по одному наименьшему простому множителю >1 от всякого целого числа н.р.ч.). Вида: $1_{(2)}3_{()}5_{()}7_{()}3_{()}11_{()}13_{()}3_{()}17_{()}19_{()}3_{()}23_{()}5_{()}3_{()}29_{()}\ldots.47_{()}7_{()}3_{()}53_{()}5_{()}3_{()}\ldots.3_{()}P_{()}P_{()}3\ldots,$

где P – наименьшие простые множители >1, по одному от числа.

1.2. Праймориально-периодические фракталы этого чередования. При этом для каждого очередного простого числа $=P_X$ Решето Эратосфена форматирует н.р.ч. (представленный чередованием первых простых чисел $\le P_X$) в виде зеркально-симметричного праймориально-повторяемого периодического фрактала, расположенного на участке н.р.ч. от 1 до $P_X\#$, где вычеркнутые и не вычеркнутые числа расположены зеркально-симметрично относительно числа

$=P_X\#/2$ и повторяются без изменения своего положения с периодом$=P_X\#$. Свой праймориально-повторяемый периодический фрактал для каждого очередного простого числа $=P_X$. Далее фрактал $=P_X\#$ (табл. 1).

$\varphi(P_X\#)$ не вычеркнутых чисел данного фрактала $=P_X\#$ представляют собой $\varphi(P_X\#)$ наименьших вычетов, принадлежащие приведенной системе вычетов по $\mathrm{mod}(P_X\#)$. Вида: C_n слева от числа $=P_X\#/2$ и $(P_X\#-C_n)$ справа от числа $=P_X\#/2$ (где C_n – вычет по $\mathrm{mod}(P_X\#)$. Далее термином *mod($P_X\#$)* будем обозначать период повторения фрактала $= P_X\#$ (Решета Эратосфена), равный произведению всех первых простых чисел $\leq P_X$ (праймориал $=P_X\#$). Термином *вычет по mod($P_X\#$)* будем обозначать всякое не вычеркнутое число, не кратное первым простым $\leq P_X$.

1.3. *$\varphi(P_X\#)$ вычеркнутых отрезков фракталов.* Вполне очевидно, что $\varphi(P_X\#)$ наименьших вычетов $\mathrm{mod}(P_X\#)$ структурируют фрактал $=P_X\#$ в счетную фрактально-образную периодическую структуру, содержащую $\varphi(P_X\#)$ «вычеркнутых отрезков» н.р.ч. с различными длинами. Каждый из этих «вычеркнутых отрезков» н.р.ч. представляет собой последовательность целых чисел по нарастающей от C_1 до C_2 в виде последовательности двоек от первого до последнего числа, между которыми расположены чередования разного количества различных вычеркнутых первых простых нечетных чисел $\leq P_X$, по одному наименьшему простому множителю ≥ 3 от числа. В количестве $[(C_2-C_1)-2]/2$ последовательных нечетных чисел отрезка от C_1 до C_2, или количество различных вычеркнутых нечетных простых (наименьших множителей) в виде чередования $\leq P_X$, где $C_{1\text{-}2}$ – вычеты по $\mathrm{mod}(P_X\#)$.

$\varphi(P_X\#)$ таких «вычеркнутых отрезков», представленных чередованиями первых простых чисел $\leq P_X$ вида: C_1…~~3pp3pp3pp~~…C_2, располагаются на участке н.р.ч. от 1 до $P_X\#$ зеркально-симметрично относительно центра симметрии числа$=(P_X\#)/2$, а далее повторяются без изменения с периодом$= P_X\#$ (табл. 1).

Таблица 1. ($P_X\#$) Периодический фрактал $=P_X\#$, в том числе приведенная система вычетов по mod($P_X\#$) / Table 1. (PX #) Periodic fractal = PX #, including the reduced mod residue system (PX #)

1, ~~3,5,7,3..~~	..C_1 ..	~~ppp~~	..C_2 ..	~~ppp~~	.. Cn ..	~~ppp~~	$P_X\#-Cn$	~~ppp~~	$P_X\#-C_1$	~~5,3~~, $(P_X\#-1)$
$(1+P_X\#)$~~3,5,~~	$C_1+P_X\#$	~~ppp~~	$C_2+P_X\#$	~~ppp~~	$Cn+P_X\#$	~~ppp~~	$2P_X\#-Cn$	~~ppp~~	$2P_X\#-C_1$	~~5,3,~~$(2P_X\#-1)$
$(1+2P_X\#)$,~~3,~~	$C_1+2P_X\#$	~~ppp~~	$C_2+2P_X\#$	~~ppp~~	$Cn+2P_X\#$	~~ppp~~	$3P_X\#-Cn$	~~ppp~~	$3P_X\#-C_1$	~~5,3~~,$(3P_X\#-1)$
...	...	~~ppp~~	...	~~ppp~~	...	~~ppp~~	...	~~ppp~~	...	...
$(1+nP_X\#)$,~~3,~~	$C_1+nP_X\#$	~~ppp~~	$C_2+nP_x\#$	~~ppp~~	$Cn+nP_X\#$	~~ppp~~	$P_{X+1}\#-Cn$	~~ppp~~	$P_{X+1}\#-C_1$	~~5,3~~,$(P_{X+1}\#-1)$
Далее повторение фрактала $=P_X\#$ с периодом $=P_X\#$ / Further repetition of a fractal = PX # with a period = PX #										

Вычеркивая (по диагоналям) по одному числу, кратному-P_{X+1}, в каждом столбце $=Cn$, получим в P_{X+1} строках табл. 1: $\varphi(P_X\#)*(P_{X+1}\text{строк})-\varphi(P_X\#)_{\text{кратных}}\ P_{X+1} = \varphi(P_{X+1}\#)$ вычетов $\mathrm{mod}(P_{X+1}\#)$. Развернув в одну строку участок н.р.ч. от 1 до $P_{X+1}\#$, получим фрактал $=P_{X+1}\#$ с периодом повторения$=P_{X+1}\#$.

И так далее: *свой периодический фрактал $=P_n\#$ для каждого очередного простого числа $=P_n$, где n – целое.*

Таблица 1. (5#) – Числовой пример табл. 1. Фрактал =5# с периодом =5# /
Table 1. (5 #) – Numeric example table. 1. Fractal = 5 # with a period = 5 #

1	~~.3.,5.~~	C_1	~~.3.~~	C_2	C_3	~~.3.~~	5#--C_3	5#--C_2	~~.3.~~	5#--C_1	~~.5.,3.~~	5#–1
1	~~.3.,5.~~	7	~~.3.~~	11	13	~~.3.~~	30–13=17	30–11=19	~~.3.~~	30–7=23	~~.5.,3.~~	30–1
30+1	~~.3.,5.~~	30+7	~~.3.~~	30+11	43	~~.3.~~	2▪30-13=47	2▪30–11 =49	~~.3.~~	2▪30–7 =53	~~.5.,3.~~	2▪30–1
60+1	~~.3.,5.~~	2▪30+7	~~.3.~~	2▪30+11	73	~~.3.~~	3▪5#-13=77	3▪5#--11 =79	~~.3.~~	3▪5#--7 =83	~~.5.,3.~~	3▪30–1
И так далее: повторение фрактала =5# с периодом = 5# / And so on: repeating a fractal = 5 # with a period = 5 #												
181	~~.3.,5.~~	187	~~.3.~~	191	193	~~.3.~~	7#--13=197	7#--11=199	~~.3.~~	7#--7=203	~~.5.,3.~~	7#–1
...	~~.3.,5.~~	...	~~.3.~~	...	...	~~.3.~~	...	...	~~.3.~~	...	~~.5.,3.~~	...

Таблица 1. (7#) – Числовой пример табл. 1. Фрактал =7# с периодом=7# /
Table 1. (7 #) – Numeric example table. 1. Fractal = 7 # with period-house = 7 #

	~~3.5.7.3~~	C_1	C_2	~~.3.~~	..	C_n	~~.3.~~	7#--C_n	7#–C_2	7#–C_1	~~3.7.5.3~~	7#–1
1	~~3.5.7.3~~	11	13	~~.3.~~	..	...	~~.3.~~	...	210–13	210–11	~~3.7.5.3~~	210-1
210+1	~~3.5.7.3~~	210+11	210+13	~~.3.~~	..	...	~~.3.~~	...	2▪210-13	2▪210-11	~~3.7.5.3~~	420-1
2▪210+1	~~3.5.7.3~~	2▪210+11	2▪210+13	~~.3.~~	..	...	~~.3.~~	...	3▪7#–13	3▪7#--11	~~3.7.5.3~~	630-1
И так далее: повторение фрактала =7# с периодом = 7# / And so on: repeating fractal = 7 # with a period = 7 #												
2101	~~3.5.7.3~~	2111	2113	~~.3.~~	..	....	~~.3.~~	...	11#–13	2299	~~3.7.5.3~~	11#–1
...	3.5.7.3	...	...	~~.3.~~	..	...	~~.3.~~	...	...	...	~~3.7.5.3~~	...

Таким образом, квадрат всякого произвольно взятого простого числа вида = $P\text{n}^2$ принадлежит строго своему фракталу =Pn#, где на участке н.р.ч. от 1 до Pn# расположено φ(Pn#) «вычеркнутых отрезков» н.р.ч. с различными длинами от C_1 до C_2, в виде чередований первых простых чисел ≤Pn, длиной [(C_2–C_1)—2}]/2 последовательных нечетных чисел отрезка от C_1 до C_2, которые повторяются без изменения с периодом=Pn#.

В данной работе доказано, что на участке н.р.ч. от $P\text{n}^2$ до $(P\text{n}_{+1})^2$ фрактала =Pn# расположено не менее четырех простых чисел в составе чередования первых простых чисел ≤Pn.

На отрезке н.р.ч. вида: P_1 ..~~3pp3~~..P_2 ..~~3pp3~~..P_3 ..~~3pp3~~..P_4, где p – чередования первых простых чисел ≤Pn, $P_{1\text{-}4}$ – вычеты mod(Pn#) <$(P\text{n}_{+1})^2$.

2. Группы по четыре вычета mod(px#) фракталов=P_X#. Группируем φ(P_X#) наименьших вычетов =C mod(P_X#), расположенных в верхней строке рис. 1 фрактала = P_X# в виде пар вычетов строго через два последовательных вычета mod(P_X#) и индексируем от № 1 до № 4, каждый из четырех вычетов в каждой паре № 2 (через два) вычета. Вида: (C_1.. C_2.. C_3.. C_4).

Получим фрактал =P_X#, содержащий φ(P_X#) «вычеркнутых отрезков» н.р.ч. с различными длинами. Каждый такой «вычеркнутый отрезок» расположен в границах от C_1 до C_4 и представлен в виде чередования разного количества различных первых простых ≤P_X, в том числе строго два вычета C_2 и C_3 mod(P_X#). То есть получим φ(P_X#) пар № 2 (строго через два) вычета mod(P_X#), расположенных на отрезках н.р.ч., представленных чередованиями ≤P_X (далее «отрезки» н.р.ч.).

Вида: C_1~~…p,3,p,p,3,p…~~C_2 ~~…~~C_3~~…p,3,p,p,3,p…~~C_4 [8. С. 79].

фрактал=P_X#	ᵽ-С ᵽ	ᵽ-С ᵽᵽ	ᵽ-С ᵽᵽ	ᵽ-С ᵽᵽ	ᵽ-С ᵽᵽ	ᵽ-С ᵽᵽ	ᵽ-Сᵽᵽ	ᵽ С ᵽ	……	P_X#
1) группа пар № 2	$_4C_1$ᵽ	ᵽ-C_2 ᵽ	ᵽC_3ᵽ	ᵽ$_1C_4$ᵽ	ᵽ-$_2$С ᵽ	ᵽ-$_3$С ᵽ	$_{ᵽ4}C_{1ᵽ}$	…..	…..	P_X#
2) группа пар № 2	….	ᵽ $_4C_1$ᵽ	ᵽC_2ᵽ	ᵽ-C_3ᵽ	ᵽ-$_1C_4$ᵽ	ᵽ-$_2$С ᵽ	ᵽ$_3$Сᵽ	$_{ᵽ4}C_{1ᵽ}$	…..	P_X#
3) группа пар № 2	….	….	ᵽ$_4C_1$ᵽ	ᵽ-C_2ᵽ	ᵽ-C_3 ᵽ	ᵽ-$_1C_4$ᵽ	ᵽ$_2$Сᵽ	$_{ᵽ3}$Сᵽ	$_{ᵽ4}C_{1ᵽ}$	P_X#

Рис. 1. Вид н.р.ч. в виде периодического фрактала =P_X#, состоящего из трех групп сопряженных чередований ≤P_X, где индексируются строго по четыре последовательных вычета mod(P_X#), в каждой паре № 2 mod(P_X#) / Fig. 1. Type nr.ch. in the form of a periodic fractal = PX#, consisting of three groups of conjugated alternations "PX", where four consecutive residues of mod (PX#) indexes are strictly indexed, in each pair № 2 mod (PX #)

При этом каждый из φ(P_X#) вычетов =C mod(P_X#) (расположенных в верхней строке рис. 1 фрактала =P_X#) одновременно присутствует в каждой из трех последовательностей групп пар № 2 (через два) наименьших вычета mod(P_X#). В составе трех различных, сопряженных между собой, чередованиях ≤P_X с различной длиной. В виде вычетов различных пар № 2: и как -$_4C_1$, и как -C_2 и как -C_3.

Эти φ(P_X#) пар вычетов № 2 по mod(P_X#), с различными разностями этих пар вида: R=(C_4—C_1), располагаются во фрактале=P_X# зеркально-симметрично относительно числа =(P_X#)/2, где каждая левая и правая из этих пар № 2 ограничивает вычеркнутые отрезки в виде зеркальных чередований ≤P_X с различными попарно-равными длинами. То есть чередования одной и той же длины R слева = R справа, с зеркально-симметричным расположением одних и тех же первых простых нечетных чисел ≤ P_X. Так как в зеркальной структуре (симметричной относительно числа =(P_X#)/2), всякому "влево направленному" чередованию, ограниченному соответствующей парой вычетов № 2 вида R(слева)=(C_4—C_1) однозначно соответствует зеркально-симметричное «право-направленное» чередование (тех же самых первых простых) такой же длины, с той же разностью пар № 2 вида: R(справа) =(P_X#—C_1) —(P_X#—C_4)=(C_4—C_1), где $C_{1\text{-}4}$ – вычеты mod(P_X#). Так как всякий очередной фрактал =P_X# форматируется двумя различными способами: налево и направо направленными Решетами Эратосфена из центра симметрии числа =(P_X#)/2 [8. С. 79].

Далее эти группы по четыре вычета mod(P_X#) повторяются во фрактале=P_X# без изменения с периодом=P_X#.

3. Распределение простых чисел.

3.1. Предельная длина распределения двух вычетов (двух простых). В статьях «О распределении простых чисел», «Четыре простых числа между квадратами двух последовательных простых чисел» [7. С. 142; 8. С. 80] доказано, что *если предельно-длинное чередование всех первых простых чисел ≤P_X можно составить одним единственным способом,* тогда для каждого очередного простого числа=P_X на участке от 1 до P_X# (каждого очередного фрактала =P_X#), после исключения всех зеркально-равных пар № 2 (чередования ≤P_X в которых составлены двумя разными способами), где Rлев.=Rправ., существует единственная зеркально-неповторяемая пара № 2 mod(P_X#), которая ограничивает зеркально-неповторяемое чередование всех первых простых ≤P_X, где расположены два последовательных вычета C_2 и C_3 mod(P_X#), принадлежащие этой паре № 2 (через два) вычета mod(P_X#). То есть чередование, составленное единственным способом от (P_X#—C_1) до (P_X#+C_1), с разностью R=(P_X#+C_1) — (P_X#—C_1)= C_1+C_1, где C_1 = P_{X+1}. (так как C_1=P_{X+1}, есть первое простое число, не кратное ≤ P_X).

То есть во фрактале =P_X# определен вид единственного зеркально-неповторяемого отрезка н.р.ч., представленного предельно-длинным чередованием первых простых чисел ≤ P_X (фрактала=P_X#), в составе которого расположено строго два вычета C_2 и C_3 mod(P_X#), принадлежащие этой предельной паре № 2 mod(P_X#). Вида: от C_1=(P_X#—P_{X+1})—

~~P_X...3,7,5,3, ...~~ $C_2=(P_X\#-1)$, $C_3=(P_X\#+1)$, ~~3,5,7, ...P_X...~~ до $C_4=(P_X\#+P_{X+1})$.

Разность двух граничных вычетов по $\mathrm{mod}(P_X\#)$ этой предельной пары № 2 (через два) есть: $R=(C_4-C_1)=(P_X\#+P_{X+1})-(P_X\#-P_{X+1})=P_{X+1}+P_{X+1}=2P_{X+1}$. Количество нечетных чисел этого единственного отрезка н.р.ч., представленного предельно-длинным чередованием $\leq P_X$, в составе которого расположено строго два вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$, принадлежащие этой паре № 2 $\mathrm{mod}(P_X\#)$, есть: $(R-2)/2= =(2P_{X+1}-2)/2 =(P_{X+1}-1)$ нечетных чисел. Длина такого предельного отрезка н.р.ч., представленного чередованием $\leq P_X$, содержащим два вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$, есть: $(P_{X+1}-1)$ нечетных$+P_{X+1}$ четных $=(2P_{X+1}-1)$ целых чисел.

Вполне очевидно, что все остальные (зеркально-симметрично расположенные, т. е. составленные двумя разными способами) «самые длинные» отрезки н.р.ч., представленные чередованиями $\leq P_X$, где расположено строго по два вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$, которые принадлежат всем остальным парам № 2 (через два) вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$ (представленные на рис. 1 фрактала$=P_X\#$) – будут короче предела. То есть строго два вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$ среди $<(2P_{X+1}-1)$ целых чисел, где всякие $(C_4-C_1)=R_{лев.}=R_{прав.}<2P_{X+1}$.

Очевидно, что для всякого наперед заданного простого числа $=Pn$, соответственно и Pn^2, существует свой фрактал $=Pn\#$. Где всякие два последовательных вычета C_2 и C_3 $\mathrm{mod}(Pn\#)$ входят в состав группы C_1-C_2 -C_3-C_4 и будут расположены в пределах длины чередования первых простых $\leq Pn$, расположенных от C_1 до C_4, т. е. в границах отрезка н.р.ч. короче - $(2Pn_{+1}-1)$ целых чисел. Так как всякие $(C_4-C_1)=R<2P_{n+1}$.

То есть на участке н.р.ч. от 1 до Pn_{+1}^2 этого фрактала $=Pn\#$ всякие два последовательных простых числа P_2 и P_3 входят в состав группы $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ и расположены в составе отрезка н.р.ч. длиной короче предела $=(2Pn_{+1}-1)$ целых чисел (от P_1 до P_4). Так как всякие: $R=(P_4-P_1)<2Pn_{+1}$.

3.2. Предельная длина распределения четырех вычетов (четырех простых). Очевидно, что всякие четыре последовательных вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$ $(C_1\ \cancel{pp}\ C_2\ \cancel{pp}C_3\ \cancel{pp}C_4)$, формирующие каждую пару № 2 $\mathrm{mod}(P_X\#)$ (рис. 1), слева и справа ограничены вычетами $\mathrm{mod}(P_X\#)$ вида $=\{C_A\}$ и $=\{C_B\}$, принадлежащие соседним чередованиям $\leq P_X$. То есть расположены на отрезке н.р.ч., представленном в виде чередования $\leq P_X$, содержащего строго шесть последовательных вычетов $\mathrm{mod}(P_X\#)$ вида $\{C_A\}\cancel{pp}C_1\ \cancel{pp}C_2\ \cancel{pp}C_3\ \cancel{pp}C_4\ \cancel{pp}\{C_B\}$.

То есть всякая группа из шести последовательных вычетов $\mathrm{mod}(P_X\#)$ вида $\{C_A\}\cancel{pp}C_1\ \cancel{pp}C_2\ \cancel{pp}C_3\ \cancel{pp}C_4\ \cancel{pp}\{C_B\}$ представляет собой отрезок н.р.ч., представленный чередованием $\leq P_X$, в границах которого от $\{C_A\}$ до $\{C_B\}$ только и может быть расположена всякая пара № 2 (через два) вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$, сформированная (ограниченная) остальными четырьмя вычетами $\mathrm{mod}(P_X\#)$-$(C_1\ \cancel{pp}C_2\ \cancel{pp}C_3\ \cancel{pp}C_4)$. Вида: от $\{C_A\}$ pp C_1 pp P_X...3,p,p,3, C_2, C_3 3,p,p,3... P_X pp C_4 pp до $\{C_B\}$.

При этом в соответствии с п. 1.5 всякие $(C_4-C_1)=R_4<2P_{X+1}$.

После исключения всех зеркально-равных пар № 2 (составленных двумя разными способами), где R_6 лев.$=R_6$ прав. и $R_6=(C_6-C_1)$. Только в окрестностях числа $=P_X\#$ и расположено зеркально-неповторяемое (составленное единственным способом), то есть предельно-длинное чередование с использованием всех первых простых чисел$\leq P_X$, в составе которого расположено строго шесть последовательных вычетов $\mathrm{mod}(P_X\#)$. Вида: от $\{C_A=(P_X\#-P_{X+2})\}$...$C_1=(P_X\#-P_{X+1})$... ~~P_X...3,7,5,3,~~ $C_2=(P_X\#-1)$,$C_3=(P_X\#+1)$, ~~3,5,7,3 .....P_X...~~ $C_4=(P_X\#+P_{X+1})$... до $\{C_B=(P_X\#+P_{X+2})\}$ [8. С. 81].

Разность двух граничных вычетов $\mathrm{mod}(P_X\#)$ этого предельно-длинного чередования $\leq P_X$ есть $R_6=\{C_B\}-\{C_A\}=(P_X\#+P_{X+2})-(P_X\#-P_{X+2})=P_{X+2}+P_{X+2}=2P_{X+2}$.

При этом в соответствии с п. 3.1: $R_4=(C_4-C_1)=2P_{X+1}$.

Таким образом, предельная длина отрезка н.р.ч., представленного чередованием $\leq P_X$ вида $\{C_A\}\ \cancel{pp}\ C_1\ \cancel{pp}\ C_2\ \cancel{pp}\ C_3\ \cancel{pp}\ C_4\ \cancel{pp}\{C_B\}$, в границах которого от $\{C_A\}$ до $\{C_B\}$ только и может быть расположена всякая пара № 2 (через два) вычета $\mathrm{mod}(P_X\#)$, составляет: $(R_6-2)/2=(P_{X+2}-1)$ нечетных чисел. Всего: $(P_{X+2}-1)$ нечетных$+P_{X+2}$ четных$=(2P_{X+2}-1)$ целых чисел.

С учетом п. 3.1. получим, что все остальные «зеркально-равные» пары № 2 (через два) вычета mod(P_X#) имеют ограничение длины своих чередований $\leq P_X$ от C_1 до C_4, т. е. $(C_4 — C_1) = R_4 < 2P_{X+1}$, и расположены на отрезке н.р.ч. длиной короче $(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел.

Таким образом для всякого наперед заданного простого числа=Pn, а соответственно и $=Pn^2$, существует свой фрактал=Pn# у которого на участке н.р.ч. от 1 до Pn_{+1}^2 всякие четыре последовательных простых числа P_1 P_2 P_3 P_4 имеют ограничение длины своего чередования $\leq Pn$ расположенного от P_1 до P_4 т.е. $(P_4 — P_1) = R_4 < 2Pn_{+1}$ и эта ограниченная по длине группа из четырех простых чисел расположена в пределах «отрезка» н.р.ч. короче $(2Pn_{+2} — 1)$ целых чисел.

4. *Доказательство гипотезы Брокара.* Вполне очевидно, что на рис. 1 показан порядок индексации всяких четырех произвольных последовательных вычетов mod(P_X#), расположенных в составе чередований $\leq P_X$ на произвольном участке н.р.ч. фрактала=P_X#.

Тогда, индексируя последовательные вычеты mod(P_X#), расположенные в окрестностях участка н.р.ч. $(P_{X+1} — 2)^2 \div P_{X+1}^2$, получим:

4.1. Для всякого очередного простого числа=P_X на участке от 1 до P_{X+1}^2 фрактала =P_X# всякий вычет mod(P_X#) есть простое число.

4.2. При этом всякие четыре последовательных простых числа, расположенные в составе чередования вида: P_1~~pp~~P_2~~pp~~P_3~~pp~~P_4, формирующие каждую пару № 2 mod(P_X#) (рис. 1), слева и справа ограничены вычетами mod(P_X#) вида =$\{{}_3P_A\}$ и =$\{{}_2C_B\}$, принадлежащие соседним чередованиям $\leq P_X$. То есть расположены в составе чередования $\leq P_X$ на отрезке н.р.ч. вида $\{{}_3P_A\}$~~pp~~ ${}_4P_1$ ~~pp~~P_2 ~~pp~~P_3 ~~pp~~ ${}_1P_4$ ~~pp~~$\{{}_2C_B\}$.

Из п. 3.2. следует, что отрезок н.р.ч. – чередование $\leq P_X$ из шести последовательных вычетов mod(P_X#). Вида от $\{{}_3P_A\}$ ~~pp~~ ${}_4P_1$ ~~pp~~ P_2 ~~pp~~ P_3 ~~pp~~ ${}_1P_4$ ~~pp~~ до$\{{}_2C_B\}$ имеет длину не более $(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел, где $(P_4 — P_1) = R_4 < 2P_{X+1}$.

4.3. Мы не знаем порядок распределения простых чисел, но из постулата Бертрана следует, что $2P_{X+1} > P_{X+2}$. То есть всякий отрезок н.р.ч. содержащий $2(2P_{X+1} — 2)$ последовательных чисел длиннее отрезка н.р.ч. содержащего $(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел. Отсюда следует, что для всякого фрактала=P_X#, в границах участка н.р.ч. от $(P_{X+1} — 2)^2$ до P_{X+1}^2 длиной $=2(2P_{X+1} — 2)$ целых чисел, *не существует ни одного отрезка н.р.ч. длиной $(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел, который состоит из непрерывного чередования первых простых* $\leq P_X$. Так как в соответствии с п. 3.2. всякое чередование первых простых $\leq P_X$ длиной короче $(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел содержит в своем составе строго четыре последовательных простых числа (для участка н.р.ч. от 1 до P_{X+1}^2). *Действительно:*

4.3.1. Индексируя строго по четыре последовательных вычета mod(P_X#), расположенных левее окрестностей числа=P_{X+1}^2, получим три последовательности сопряженных друг с другом чередований первых простых чисел $\leq P_X$ вида № 1., № 2., № 3 (три пары № 2 mod(P_X#) представлены на рис. 2). Каждое из этих чередований $\leq P_X$, пар № 2 mod(P_X#), в соответствии с п. 3.2, располагается в границах отрезка н.р.ч. длиной короче предела $=(2P_{X+2} — 1)$ целых чисел.

н.р.ч.	~~pp~~ P ~~pp~~	P или $(P_{X+1}-2)^2$	~~pp~~ P ~~pp~~ P ~~pp~~ P ~~pp~~ P ~~pp~~	$C = P_{X+1}^2$	~~pp~~ C ~~pp~~
№ 1).	~~pp~~$\{{}_3P_A\}$~~pp~~	${}_4P_1$или$(P_{X+1}-2)^2$	~~pp~~ P_2 ~~pp~~ P_3 ~~pp~~ ${}_1P_4$ ~~pp~~$\{{}_2P_B\}$~~pp~~	${}_3C_2 = P_{X+1}^2$	~~pp~~ ${}_4C$ ~~pp~~
№ 2).	~~pp~~ ${}_2P$ ~~pp~~	$\{{}_3P_A \div (P_{X+1} -- 2)^2\}$	~~pp~~ ${}_4P_1$ ~~pp~~ P_2 ~~pp~~ P_3 ~~pp~~ ${}_1P_4$ pp	$\{{}_2C_B = P_{X+1}^2\}$	~~pp~~ ${}_3C$ ~~pp~~
№ 3).	~~pp~~ ${}_1P$ ~~pp~~	${}_2P$ или$(P_{X+1}-2)^2$	~~pp~~${}_3P_A\}$~~pp~~ ${}_4P_1$ ~~pp~~ P_2 ~~pp~~ P_3 ~~pp~~	${}_1C_4 = P_{X+1}^2$	~~pp~~ **$\{{}_2C_B\}$** ~~pp~~

Рис. 2. Вид трех сопряженных чередований $\leq P_X$ по четыре простых числа в каждой паре № 2 mod(P_X#): от $\{{}_3P_A\}$ ${}_4P_1$ P_2 P_3 ${}_1P_4$ до $\{{}_2C_B\}$, пересекающие участок н.р.ч. от $(P_{X+1} — 2)^2$ до P_{X+1}^2 /
Fig. 2. Type of three conjugated alternations $\leq P_X$ with four primes in each pair of mod # 2 mod (P_X #): from $\{{}_3P_A\}$ ${}_4P_1$ P_2 P_3 ${}_1P_4$ to $\{{}_2C_B\}$, crossing the section of the nr.p. from (P_X + 1—2) 2 to P_X + 12

4.3.2. Вполне очевидно, что каждое из целых чисел этих трех сопряженных чередований $\leq P_X$, представленные в строках № 1., № 2., № 3. Рис. 2., в том числе и неизвестные нам простые числа участка н.р.ч. от $(P_{X+1}—2)^2$ до $C=P_{X+1}{}^2$ отображаются (индексируются) в верхней строке рис. 2.

При этом в строке № 2. рис. 2 число $\{_2C_B=P_{X+1}{}^2\}$ вычет mod(P_X#) является общим граничным вычетом mod(P_X#) и отрезка (№ 2) и участка н.р.ч. (верх. строка рис. 2). То есть в соответствии с п. 4.3 получим, что все числа отрезка н.р.ч. (№ 2), в том числе и четыре простых числа $_4P_1\,P_2\,P_3\,{}_1P_4$, отображаются в верхней строке рис. 2 на участке н.р.ч. от $(P_{X+1}—2)^2$ до $P_{X+1}{}^2$. То есть принадлежат этим двум чередованиям $\leq P_X$ одновременно.

Получим, что в границах участка н.р.ч. от $(P_{X+1}—2)^2$ до $P_{X+1}{}^2$ (на верхней строке рис. 2) проиндексированы строго четыре последовательных простых числа, расположенные на отрезке н.р.ч. (№ 2) от $\{_3P_A$ или$(P_{X+1}$--$2)^2\}$ $_4P_1\,P_2\,P_3\,{}_1P_4$ до $\{_2C_B=P_{X+1}{}^2\}$.

Учитывая наличие четырех простых чисел от $(P_{X+1}$-$2)^2$ до $\{_2C_B=P_{X+1}{}^2\}$ (полученных от строки № 2 рис. 2), от двух оставшихся строк № 1) и № 3) среди сопряженных друг с другом чередований $\leq P_X$ рис. 2, получим: от строки № 1). рис. 2: эти же числа (в виде чередования $\leq P_X$) индексируются частью отрезка н.р.ч. (№ 1) вида $\{_3P_A\}\,{}_4P_1\,P_2\,P_3\,{}_1P_4$ $\{_2P_B\}$, где от $\{_4P_1$ или $(P_{X+1}$--$2)^2\}$ до $_3C_B=P_{X+1}{}^2$ (в верх. строке рис. 2) расположены три простых числа $P_2P_3P_4$ этого отрезка-чередования $\leq P_X$ (№ 1) и простое число $=\{_2P_B\}$ последующего отрезка-чередования $\leq P_X$ (№ 1).

От строки № 3). рис. 2 получим: эти же числа (в виде чередования$\leq P_X$) индексируются частью отрезка н.р.ч. (№ 3) вида $\{_3P_A\}_4P_1P_2P_3\,{}_1P_4\{_2C_B\}$, где от $\{_3P_A\}$ до $_1C_4=P_{X+1}{}^2$ (в верх. строке рис. 2) расположены три простых числа $P_1P_2P_3$ отрезка-чередования $\leq P_X$ (№ 3) и простое число$=\{_3P_A\}$ предыдущего отрезка-чередования $\leq P_X$ (№ 3).

Таким образом, от каждого из трех видов сопряженных чередований $\leq P_X$, расположенных в строках: и № 1)., и № 2)., и № 3). вида $\{_3P_A\}$~~pp~~ $_4P_1$ ~~pp~~P_2 ~~pp~~P_3 ~~pp~~ $_1P_4$ ~~pp~~$\{_2C_B\}$, в верхней строке рис. 2, т. е. на участке н.р.ч. от $(P_{X+1}—2)^2$ до $P_{X+1}{}^2$ отображаются четыре простых числа.

4.3.3. Вполне очевидно, что всякое произвольно взятое число$=P_n{}^2$ принадлежит строго соответствующему фракталу$=P_n$#. Тогда, пробегая значениями простого числа$=P_n$ по всем простым числам по нарастающей (где P_n есть: 7, 11, 13, 17...), получим, что для всякого фиксированного значения простого числа$=P_n$ Решето Эратосфена форматирует н.р.ч. в соответствующий периодический фрактал$=P_n$#, в котором φ(P_n#) наименьших вычета mod(P_n#) структурируют н.р.ч. в виде последовательности из трех групп сопряженных чередований $\leq P_n$, содержащих строго по четыре последовательных вычета mod(P_n#) на отрезках н.р.ч. длиной не более: $(2P_{n+1}—1)$ целых чисел (от C_1 до C_4) в каждой группе, паре № 2 mod(Pn#).

На участке от $(P_{n+1}—2)^2$ до $P_{n+1}{}^2$, а тем более от $P_n{}^2$до $P_{n+1}{}^2$ (этого фрактала$=P_n$#) расположено не менее четырех простых чисел. Так как всякие четыре последовательных простых числа участка от $(P_{n+1}—2)^2$ до $P_{n+1}{}^2$ расположены в парах № 2 mod(Pn#). На отрезках н.р.ч. короче: $(2P_{n+1}—1)$ целых чисел (от P_1 до P_4). Вида: C_1..3pp3..C_2 ..3pp3..C_3 ..3pp3..C_4). Так как $(P_4—P_1)$=R4 < 2Pn+1. И эта ограниченная «по длине» группа из четырех последовательных простых чисел (P_1 -P_2 -P_3 -P_4) в виде пары №2 mod(Pn#) расположена в границах «отрезка» н.р.ч. длиной не более $(2P_{n+2}—1)$ целых чисел. (см. п.3.1., п.3.2.)

Допустим, что существует хотя бы одно такое простое число$=P_X$, для которого Решето Эратосфена форматирует фрактал$=P_X$#, где из общего количества φ(P_X#) пар № 2 mod(P_X#), этого фрактала$=P_X$#, на участке от $(P_{X+1}—2)^2$ до $P_{X+1}{}^2$ НЕТ четырех простых чисел среди всяких $2(2P_{X+1}—2)$ целых чисел этого участка. То есть, нет пар № 2 mod(P_X#), содержащих ЧЕТЫРЕ последовательных простых числа на отрезке н.р.ч. (в соответствии с п. 3.1.) длиной < $(2P_{X+1}—1)$ целых чисел (от P_1 до P_4).

Тогда на участке от $(P_{X+1}—2)^2$ до $P_{X+1}{}^2$ всякие четыре простых числа, принадлежащих паре № 2 mod(P_X#), располагаются в составе более длинных чередований $\leq$

P_X среди $\geq(2P_{X+1}-1+n)$ целых чисел. При этом справа от числа $=(P_X\#)/2$ будут зеркально-симметрично расположены такие же пары № 2, ограничивающие зеркальные чередования тех же самых первых простых $\leq P_X$ через два вычета mod$(P_X\#)$, такой же длины $\geq(2P_{X+1}-1+n)$ целых чисел.

В соответствии с п. 3.1 известно, что в окрестностях числа$=P_X\#$, фрактала $=P_X\#$ расположена зеркально-неповторяемая предельная пара № 2 mod$(P_X\#)$ «длиной»$=(2P_{X+1}-1)$ целых чисел, которая содержит четыре вычета mod$(P_X\#)$ (от P_1 до P_4). Таким образом, получим по два более длинных зеркально-симметричных чередования $\leq P_X$, ограниченные парами № 2, где $(2P_{X+1}-1+n) >> (2P_{X+1}-1)$ целых чисел, которые составлены двумя разными способами (левым и правым Решетом Эратосфена), что противоречит п. 1.5 [7. С. 142; 8. С. 80].

Заключение. В итоге получено доказательство гипотезы Брокара о том, что между квадратами всяких двух последовательных простых чисел расположено не менее четырех простых чисел, т. е. 4 простых от $(P_{n+1}-2)^2$ до P_{n+1}^2, а тем более от P_n^2 до P_{n+1}^2.

Список литературы

1. Александров П. С., Маркушевич А. Н., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951.

2. Бергман Г. Н. Число и наука о нем. М.: Гостехиздат, 1949. 164 с.

3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Гостехиздат, 1952. 180 с.

4. Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 360 с.

5. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: МИР, 1967. 511 с.

6. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.: ГИФМЛ, 1963. 92 с.

7. Щербаков А. Г. О распределении простых чисел // Перспективы науки. 2013. № 10. С. 142–147.

8. Щербаков А. Г. Четыре простых числа между квадратами двух последовательных простых чисел // Наука сегодня: глобальные вызовы и механизмы развития: материалы междунар. науч.-практ. конф. Вологда, 2018. Ч. 1. С. 77–84.

References

1. Aleksandrov P. S., Markushevich A. N., Khinchin A. Ya. *Entsiklopediya elementarnoy matematiki* (Encyclopedia of elementary mathematics). Moscow: State. publishing house of technical and theoretical literature, 1951.

2. Bergman G. N. *Chislo i nauka o nem* (Number and science about it). Moscow: Gostekhizdat, 1949. 164 p.

3. Vinogradov I. M., *Osnovy teorii chisel* (Fundamentals of Number Theory). Moscow: Gostekhizdat, 1952. 180 p.

4. Ozhigova E. P. *Razvitie teorii chisel v Rossii* (Development of Number Theory in Russia). Moscow: Editorial URSS, 2003. 360 p.

5. Prachar K. *Raspredelenie prostyh chisel* (Distribution of prime numbers). Moscow: MIR, 1967. 511 p.

6. Serpinsky V. Chto my znaem i chego ne znaem o prostyh chislah (What we know and what we do not know about primes). Moscow: GIFML, 1963. 92 p.

7. Shcherbakov A. G. *Perspektivy nauki* (Prospects for science), 2013, no. 10, pp. 142–147.

8. Shcherbakov A. G. *Nauka segodnya: globalnye vyzovy i mehanizmy razvitiya: materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* (Science Today: Global challenges and development mechanisms: Materials of the Intern. scientific-practical conf.). Vologda, 2018, Part 1, pp. 77–84.

Сведения об авторе — Information about the author

Щербаков Александр Геннадьевич, сотрудник ОАО «МОСГАЗ», г. Павловский Посад, Россия. Научные интересы: распределение простых чисел

Alexander Scherbakov, employee, OJSC "MOSGAZ", Pavlovsky Posad, Russia. Scientific interests: distribution of prime numbers